УДК 336.77.037

Колядюк В.В.,
Фартушний І.Д.
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний технічний університет України «КПІ»

МОДЕЛЮВАННЯ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЮ В УМОВАХ НЕСТАБІЛЬНОСТІ

MODELING OF STOOCK POTFOLIO UNDER INSTABILITY

В статті розглянуті методи моделювання фондового портфелю інвестора. Автором проведено аналіз моделей формування портфелю та розглянуто методи подальшого аналізу та управління сформованим портфелем.

В статье рассмотрены методы моделирования фондового портфеля инвестора. Автором проведено аналіз моделей формирования портфеля и рассмотрено методы последующего анализа и управления сформированным портфелем.

In the article were presented methods of modeling stock portfolio of investor. By author was done an analysis of models of stock portfolio formation and were presented methods of future analysis and managing of the portfolio.

Ключові слова: фондовий портфель, модель Квазі-Шарпа, оптимізаційна задача, модель динаміки дохідності портфеля цінних паперів.

Вступ. Оптимізація структури портфеля цінних паперів - одне з найбільш важливих завдань ухвалення рішень в інвестиційній діяльності на фондовому ринку [1]. Вирішення задачі портфельної оптимізації дозволяє фінансовим інститутам якнайкраще розподілити наявні фінансові кошти в цінні папери та зменшити ризик від помилкових рішень.

В економіці України процес ухвалення рішень на всіх рівнях управління відбувається в умовах постійної невизначеності кінцевих результатів діяльності. Часткова невизначеність пояснюється тим, що економічні проблеми зводяться до вибору з безлічі альтернатив. При цьому економічні агенти не мають у своєму розпорядженні повного знання ситуації для вироблення оптимального рішення, а також не мають достатніх можливостей для адекватного обліку всієї доступної їм інформації.

Питанням портфельного інвестування займались такі науковці, як Марковіц Г., Шарп У., Тобін Дж. і даєтьдинаміки портфелю в своїх роботах розглядали Блек Ф., Шоулз М., Домбровський В.В., Кузнєцов Д.Ф., Гаращенко Ф.Г., Рутицька В.В. і так далі. Проте в літературі не розглядається поєднання даних статичних та динамічних моделей.

Постановка завдання. Формування фондового портфелю інвестора в умовах нестабільності розвитку фондового ринку в Україні.

Основний об'єкт дослідження – дохідність отриманого фондового портфелю та його ризик.

У розпорядженні інвестора є N акцій, з певними дохідностями за певний період. Треба сформувати фондовий портфель з максимальною дохідністю, а також з мінімальним ризиком.

Методологія. Результати дослідження отримані на основі економіко-математичного моделювання, економічної теорії та чисельного моделювання.

Результати дослідження. Нехай доходність портфелю з N цінних паперів R_p та його ризикованість σ_p визначається функціями:

$$R_p = RETURN(W_i, \sigma_i, r_i; i = 1 \dots N)$$

$$\sigma_p = RISK(W_i, \sigma_i, r_i; i = 1 \dots N)$$

де:

W_i — процентна частка цінних паперів портфеля;

σ_i — деяка характеристика ризику даного цінного паперу, звичайно це середнє квадратичне відхилення доходності цінних паперів;

r_i — доходність цінних паперів [2].

При розв'язуванні задачі необхідно урахувати наступні натуральні обмеження:

- сума усіх акцій (у відсотках) складає 100%:

$$W_1+W_2+..+W_i+..+W_n = 1$$

- кількість акцій не може бути від'ємною:

$$W_I \geq 0.$$

На сьогоднішній день найбільш розповсюджені 2 моделі визначення характеристик портфеля: модель Марковіца та модель Шарпа. Обидві моделі створені і успішно працюють в умовах, що склалися у відносно стабільних західних фондових ринків. Нажаль, до їх числа український фондовий ринок поки що не входить. Через це була розпочата спроба створити модель, яка здатна успішно функціонувати в умовах фондового ринку, що формується, розвивається та реорганізується, яким є фондовий ринок України [1,5]. Створена модель отримала назву Квазі-Шарп.

Модель базується на тому, що показники прибутковості різних цінних паперів взаємопов'язані: із зростанням доходності одних паперів спостерігається одночасне зростання і по іншим паперам, треті залишаються без змін, а в четвертих, навпаки доходність знижується. Такий вид залежності не детермінований, тобто однозначно визначений, а є стохастичним, і називається кореляцією [2].

Модель Марковіца має наступні основні припущення:

- за доходність цінних паперів приймається математичне очікування доходності;

- за ризик цінних паперів приймається середнє квадратичне відхилення доходності;
- вважається, що дані минулих періодів, які використані при розрахунках доходності і ризику, повністю відображають майбутні значення доходності;
- ступінь і характер взаємозв'язку між цінними паперами виражається коефіцієнтом лінійної кореляції.

З використанням моделі Марковіца для розрахунку характеристик портфеля пряма задача набуває вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} W_i \cdot r_i \to max; \\ \sqrt{\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N}(W_a \cdot \sigma_a \cdot W_b \cdot \sigma_b \cdot \rho_{ab})} \leq \sigma_{req}; \\ W_i \geq 0; \\ \sum_{i=1}^{N} W_i = 1. \end{cases}$$

Модель Квазі-Шарп грунтується на взаємозв'язку доходності кожного цінного папера з деякого набору N цінних паперів з доходністю одиничного портфеля з цих паперів [2].

Основні припущення моделі Квазі-Шарп полягають у наступному:

- за характеристику доходності цінного папера береться математичне очікування доходності;
- під одиничним портфелем цінних паперів слід розуміти портфель, що складається з усіх цінних паперів, що розглядаються, взятих у рівній пропорції;
- взаємозв'язок доходності цінного папера і доходності одиничного портфелю описується лінійною функцією
- під ризиком цінного папера слід розуміти ступінь залежності змін доходності цінного папера від змін доходності одиничного портфеля;
- вважається, що дані минулих періодів, використані при розрахунку доходності та ризику, відображають повною мірою майбутнє значення доходності.

За моделлю Квазі-Шарп доходність цінного папера пов'язується з доходністю одиничного портфеля функцією лінійної регресії вигляду:

$$R_i = \bar{R}_i + \beta_i (R_{sp} - \bar{R}_{sp})$$

де:

R_i — доходність цінного паперу;

R_{sp} — доходність одиничного портфеля;
β_i — коефіцієнт регресії;
$\bar{R}$ — середня доходність цінного папера за минулі періоди;
$\bar{R}_{sp}$ — середня доходність одиничного портфеля за минулі періоди [3].

З використанням моделі Квазі-Шарп для розрахунку характеристик портфеля пряма задача набуває вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(\bar{R}_i W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp})\sum_{i=1}^{N}(\beta_i W_i) \to max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\beta_i W_i)^2 \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^{N}(\sigma_{ri}^2 W_i^2)} \le \sigma_{req}; \\ W_i \ge 0; \\ \sum_{i=1}^{N} W_i = 1. \end{cases}$$

При практичному застосуванні моделі Квазі-Шарп для оптимізації фондового портфеля використовуються наступні формули:

1) За доходність одиничного портфеля у період t береться середнє значення доходності цінних паперів, що його складають, за цей же період:

$$R_{sp}^{T} = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_i^t}{N}$$

де:
R_{sp}^{t} — доходність одиничного портфеля в період t
R_i^t— доходність i-го цінного папера за період t.

2) Середня доходність цінного папера за минулі періоди:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_i^t}{T}$$

де:
R_i^t — доходність цінного папера за період t,
T — кількість періодів часу, що розглядається.

3) Середня доходність одиничного портфеля за минулі періоди:

$$\bar{R}_{sp} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{sp}^t}{T}$$

4) Коефіцієнт β цінного папера розраховується за формулою:

$$\beta_i = \frac{\sum_{i=1}^{T}[(R_i^t - \bar{R}_i)(R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})]}{\sum_{i=1}^{T}(R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2}$$

5) Залишковий ризик цінного паперу:

$$\sigma_i = \frac{\sum_{i=1}^{T}(R_i^t - \bar{R}_i - \beta \cdot (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp}))^2}{T}$$

6) Ризикованість одиничного портфеля:

$$\sigma_{sp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}\left(R_{sp}^t - \bar{R}_{sp}\right)^2}{T}}$$

В фінансовій економіці, на ряду з багато численними математичними моделями, зустрічається наступна модель динаміки дохідності портфелю цінних паперів у вигляді системи диференційних рівнянь Іто вигляду:

$$\begin{bmatrix} dx_t^{(1)} \\ \dots \\ dx_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{(1)} \\ \dots \\ m^{(n)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n} x_t^{(1)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1m)} \\ & \dots & \\ B^{(n1)} & \dots & B^{(nm)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} df_t^{(1)} \\ \dots \\ df_t^{(m)} \end{bmatrix},$$

де $x_t^{(i)}$ – дохідність *i*-го цінного паперу;

$m^{(\mathrm{i})}$ - середній рівень дохідності *i*-го цінного паперу;

γ – емпіричний коефіцієнт;

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_t^{(\mathrm{i})}$ – середня дохідність по множині цінних паперів;

$\left\|B^{(ij)}\right\|_{i,j=1}^{n,m}$- числова матриця, яка характеризує перемішування;

$f_t^{(i)}\,(i = 1, \dots, m)$ – незалежні стандартні вінеровські процеси [4].

Чисельний приклад

Сформуємо оптимальний фондовий портфель, який складається з п’яти акцій. Нехай певний експерт визначив, що для нас вигідно інвестувати кошти в акції таких підприємств, як «Азовсталь», «Житомиргаз», «Запоріжсталь», «Мотор Січ», «Укрнафта», а період аналізу - один рік.

Таблиця 1

Дані для розрахунку оптимального інвестиційного портфелю

Назва (тікер)	Середня дохідність	Коефіцієнт β	Ризик
ZHGZ	0,39%	0,29474523	1,14%
ZPST	4,82%	1,6337358	7,26%
AZST	-3,13%	0,89681621	1,65%
MSICH	1,95%	1,01923196	2,70%
UNAF	4,70%	1,1554708	3,82%

Ризик одиничного портфелю буде дорівнювати 9,98%, а середня дохідність одиничного портфелю – 1,74%.

При заданому рівні ризику отримуємо такі результати:

Назва (тікер)	Частка (W)	Дохідність	Ризик

ZHGZ	0	0,12%	1,00%
ZPST	0,007445		
AZST	0		
MSICH	0		
UNAF	0,081597		

Проведемо управління отриманого портфелю.

Оптимальним буде взяти тільки акції двох підприємств «Запоріжсталь» та «Укрнафта».

Імпіричний коефіцієнт нехай дорівнює 1, в такому разі крок інтегрування буде 1/(2^10).

Для нашого прикладу модель буде мати вигляд:

$$\begin{bmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0471 \\ 0.0482 \end{bmatrix} dt + e^{\frac{1}{2}(x_t^{(1)}+x_t^{(2)})} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ -0.05 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} df_t^{(1)} \\ df_t^{(2)} \end{bmatrix},$$

а початкова умова:

$$x_1^{(1)} = -0.0781, \qquad x_1^{(2)} = -0.2307;$$

Використовуючи різні математичні пакети можна побудувати графік динаміки даної системи і аналізувати подальше управління портфелем цінних паперів.

Висновки. Наукова новизна отриманих результатів полягає у поєднанні двох моделей: моделі формування портфелю цінних паперів Квазі-Шарпа та динамічної моделі управління ним. Використовуючи поєднання цих двох моделей сформований портфель цінних паперів та проведене його управління для подальшого дослідження за допомогою нечітко-множинного підходу.

Література

1. Шклярук С.Г. Портфельное инвестирование. Теория и практика / С.Г. Шклярук. — К.: Норапринт, 2000. – 350 с.
2. Савчук В.П. Оптимізація фондового портфелю [Електронний ресурс] /Інтернет-портал для управлінців – Режим доступу: http://www.management. com.ua/finance/fin013.html
3. Шарп У. Ф., Гордон Дж. Ал., Бейли Дж. В. Инвестиции/ Шарп У. Ф., Гордон Дж. Ал., Бейли Дж. В. - М.: ИНФРА-М, 2003. – 1028 с.
4. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов / Д.Ф. Кузнецов. - СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. - 816 с.
5. Мойсеєнко І. П. Інвестування: Навчальний посібник / Мойсеєнко І. П. – К.: Знання., 2006. – 490 с.