

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ВАЛЮТНОЇ ПАНІКИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

У процесі дослідження такого швидкозмінного соціально-економічного явища, як «валютна паніка», розроблена в дискретній формі (у вигляді систем різницевих рівнянь) математична модель динаміки валютної паніки у соціумі з врахуванням придбання та втрати імунітету, що характеризує динаміку зміни чисельності різних підгруп соціуму.

Основна мета полягала у побудові адекватної математичної моделі динаміки валютної паніки у межах соціуму, котра б враховувала зміну у часі величини імунітету суб'єктів соціуму.

Mathematical model of dynamics of monetary panic in society with regard to acquisition and loss of immunity, which characterizes the dynamics of the number change of different subgroups of society, was developed in discrete form (as a system of difference equations) during the research of such rapidly changing socio-economic phenomena as «currency panic».

The main objective was to build an adequate mathematical model of the dynamics of monetary panic within society, which would take into account the change of value of society subjects' immunity.

Вступ. Україна сьогодні йде по натягнутому канату валютної кризи. І хоча влада запевнює, що проявів валютної кризи в країні сьогодні не має – ситуація залишається нестабільною, економічні суб'єкти відносяться з недовірою до регулюючих заходів уряду та залишаються у зоні ризику. Це в свою чергу формує системну невизначеність для грошових, валютних і фінансових ринків країни, з сумнівними перспективами для економічного розвитку.

Враховуючи сучасне становище економіки багатьох країн (численні фінансові, кредитні, валютні кризи) можна вважати питання математичного моделювання такого швидкозмінного соціально-економічного явища, як «валютна паніка» актуальним.

Під терміном «валютна паніка» в даному випадку мається на увазі різке лавиноподібне зростання курсу валюти по відношенню до національної грошової одиниці. У літературі під «валютною кризою» (currency crisis), як правило, розуміють падіння курсу національної валюти на 25–30 % за декілька місяців, а також різке скорочення валютних резервів.

Проблема у сфері моделювання процесу формування валютного курсу полягає у тому, що вже наявні моделі за своєю суттю є моделями «чорного ящика». Тобто маючи вхідні статистичні дані прогнозують значення курсу, відштовхуючись від вже наявної статистики. Але ці моделі не відображають всі аспекти формування валютного курсу.

Існує необхідність створення математичних моделей, що описували б явище «валютної паніки»; відтворювали різні сценарії поведінки відмінних за поведінкою соціальних підгруп та надавали б певні рекомендації стосовно прийняття рішень економічним суб'єктам в умовах невизначеності в межах валютного ринку.

Тому метою даної роботи є моделювання такого швидкозмінного соціально-економічного процесу, як валютна паніка в умовах невизначеності.

Постановка задачі. У попередніх роботах були моделі, котрі можуть бути використані для опису будь-яких масових процесів з феноменом зараження. У побудованих раніше моделях було запропоновано математичну модель поширення паніки у неоднорідному за двома ознаками соціуму: за соціально-психологічним складом та за рольовим складом соціуму.

В умовах дії в межах соціуму таких суб'єктів, як звичайні та професійні заказники, а також лікарі, було виведено формули для ймовірностей зараження, лікування та профілактики. У цих формулах присутнє математичне вираження ефекту синергії взаємодії комунікаторів та реципієнта.

Необхідно відмітити, що однією з найважливіших властивостей реального соціуму є придбання імунітету до зараження. У запропонованих моделях дана властивість враховувалась, але величина імунітету вважалась незмінною. Більш цікавою та практично важливою властивістю є тимчасовість та часова обмеженість існуючого спочатку або придбаного у процесі паніки імунітету.

Побудова математичної моделі динаміки валютної паніки, що враховувала б втрату імунітету та описувала б довготривалий постійний процес існування інфекції в тліючому стані, її регулярні спалахи, перетворення в епідемію, являє собою завдання, виключно важливе як в теоретичному, так і в практичному плані.

При побудові моделі вважатимемо, що поведінка соціуму має постійно існуючі чинники виникнення масової паніки:

- 1) наявність суб'єктів, що заражають (некомпетентні деструктивні ЗМІ),
- 2) неминуча втрата імунітету, набутого в результаті попередніх катаклізмів.

Проаналізуємо більш докладно властивість несприйнятливості, тобто імунітет. У розглянутих раніше моделях він передбачався стабільним для окремого суб'єкта, існуючим спочатку або одержуваним після лікування. У реальності імунітет через певний час втрачається. Зазвичай при цьому сприйнятливість набуває деяке, характерне для даного суб'єкта значення.

За ступенем панічного стану соціум, звичайно, розбивається на три категорії: здорові сприйнятливі, хворі та здорові несприйнятливі (володіють імунітетом). Ввівши поняття рівня сприйнятливості, обмежимося двома значеннями «хворобливості»: здоровий та хворий.

У імітаційних моделях було б досить легко відтворити придбання та втрату імунітету. При цьому зробимо припущення, що картина розвитку

паніки набувала би властивості циклічності. А при збільшенні запасу імунітету можливо виникне ефект довгих хвиль.

З врахуванням вищеописаної диференціації соціуму та динаміки імунітету по ставимо за мету побудувати математичну модель динаміки валютної паніки в умовах невизначеності.

Таким чином маємо наступні об'єкт, предмет, мету та методи дослідження.

Об'єкт дослідження: паніка соціуму із придбанням та втратою імунітету.

Предмет дослідження: сценарії розвитку паніки соціуму із придбанням та втратою імунітету, причини та механізми її виникнення, можливі засоби регулювання та припинення такого виду паніки.

Мета дослідження: побудова адекватної математичної моделі динаміки валютної паніки у межах соціуму, диференційованого за рольовим складом та по сприйняттю суб'єктів, з врахуванням придбання та втрати імунітету в умовах невизначеності.

Методи дослідження: розробка математичних моделей поширення паніки у соціумі в дискретній та безперервній формах (у вигляді систем різницевих та диференціальних рівнянь), що характеризують динаміку зміни чисельності сприйнятливих, імунізованих та заражених для різних сценаріїв зараження, лікування та профілактики в умовах дії різних факторів.

Результати . Побудова моделі. Побудуємо математичну модель паніки, відповідну наступному механізму її поширення:

1. Здорові сприйнятливі суб'єкти соціуму заражаються хворими сусідами, а також професійним заказниками (деструктивними ЗМІ), що діють на більшу частину соціуму.
2. Професійний лікар (конструктивні ЗМІ) та здорові несприйнятливі суб'єкти соціуму здійснюють протидію зараженню, зменшуючи ймовірність зараження або переводячи сприйнятливих до розряду несприйнятливих.
3. Хворі суб'єкти соціуму виліковуються самостійно і (або) під впливом лікаря та несприйнятливих суб'єктів соціуму.
4. При цьому хворі набувають імунітету, тобто переходять у розряд несприйнятливих.
5. Кожен несприйнятливий суб'єкт соціуму (нечутливий до деструктивної інформації) володіє певним тимчасовим запасом імунітету (наприклад, в днях).
6. За певний проміжок часу імунітет зникає та суб'єкт соціуму знову стає сприйнятливим.
7. Вважаємо, що професійний заразник та професійний лікар – один (ЗМІ).

Цього достатньо для з'ясування динаміки дії механізму поширення паніки у межах соціуму, диференційованого за сприйняттям то рольовим складом.

Використовуватимемо наступні позначення:

σ – рівень сприйнятливості суб'єкта (належить відріzkу $[0,1]$);
 φ – рівень впливу суб'єкта (належить відріzkу $[0,1]$);
 γ – рівень впливу лікаря (належить відріzkу $[0,1]$);
 η – рівень впливу професійного заразника (належить відріzkу $[0,1]$);
 r – кількість контактів суб'єкта в одиницю часу;
 N – кількість суб'єктів соціуму;
 $R(t, \tau)$ – кількість здорових в момент часу t з запасом імунітету τ (запас обчислюється в деяких одиницях часу, наприклад, дні), $0 \leq \tau \leq \theta$, де θ – максимальний запас імунітету;
 $R(t, 0)$ – кількість здорових, але сприйнятливих;
 $I(t)$ – кількість хворих у момент часу t ;
 v_i – частка соціуму, на яку діє професійний заразник,
 v_d – частка соціуму, на яку діє лікар.

У розроблених раніше моделях у попередніх роботах були отримані формули ймовірності зараження, лікування та профілактики з урахуванням і без урахування ефекту синергії, без впливу та при дії професійних комунікаторів.

У самому загальному випадку ймовірність зараження сприйнятливого виражається формулою:

$$p_{\text{зараж}} = \left[1 - p\left(\prod_{i=1}^{n_1} \bar{A}_i\right) \right] \cdot p\left(\prod_{j=1}^{n_2} \bar{B}_j\right), \quad (1)$$

де A_i – подія, що полягає у зараженні реципієнта від i -го джерела за відсутності інших комунікаторів (заразників або лікарів), $p(A_i)$ – ймовірність такої події;

B_j – подія, що полягає у лікуванні хворого за рахунок впливу j -го лікаря за відсутності інших комунікаторів, $p(B_j)$ – ймовірність такої події;

n_1 та n_2 – кількості заразників та лікарів, які впливають на суб'єкта.

З урахуванням синергії взаємодії індукторів та реципієнта $p_{\text{зараж}}$ становить:

$$p_{\text{зараж}} = \left[1 - f_{\text{син_зар}} \cdot \prod_{i=1}^k (1 - p(A_i)) \right] \cdot f_{\text{син_лік}} \cdot \prod_{j=1}^l (1 - p(B_j)).$$

Функції $f_{\text{син_зар}}$, $f_{\text{син_лік}}$ кількісно виражають ефект синергії: чим менші ці функції, тим вище ефект, $0 \leq f_{\text{син_зар}} \leq 1$, $0 \leq f_{\text{син_лік}} \leq 1$.

Якщо число індукторів не перевершує 1 або усі ймовірності зараження $p(A_i)$ (лікування $p(B_j)$) за відсутності синергії дорівнюють 0 (дуже малі), то ці функції вважаються рівними одиниці.

Запропоновано наступний вигляд функцій:

$$f_{\text{син_зар}} = \mu^{k(k-1)/2}, \quad f_{\text{син_лік}} = \nu^{l(l-1)/2} \quad \text{– за відсутності ЗМІ,}$$

$$f_{\text{син_зар}} = \mu^{k(k-1)/2} \cdot \lambda_{\text{змі_зар}}, \quad f_{\text{син_лік}} = \nu^{l(l-1)/2} \cdot \lambda_{\text{змі_лік}} \quad \text{– у присутності ЗМІ.}$$

Ці функції залежать від наступних параметрів:

- μ, ν – коефіцієнти, пов’язані з синергією взаємодії заразників та лікарів на реципієнта (чим менше ці коефіцієнти, тим більш виражений ефект синергії), $0 < \mu < 1, 0 < \nu < 1$;
- $\lambda_{змі_з}, \lambda_{змі_л}$ – аналогічні коефіцієнти, пов’язані з синергією взаємовпливу ЗМІ та заразників, ЗМІ та лікуючих на реципієнта, $0 < \lambda_{змі_зар} < 1, 0 < \lambda_{змі_лік} < 1$;
- k та l – кількості хворих та імунізованих у оточенні реципієнта, але при цьому обмежені деякими величинами i_0 та j_0 .

Ймовірність успіху профілактики $p_{проф}$ за аналогією з $p_{зараж}$:

$$p_{проф} = \left[1 - p \left(\prod_{j=1}^{n_2} \bar{B}_j \right) \right] \cdot p \left(\prod_{i=1}^{n_1} \bar{A}_i \right) \quad (2)$$

Таким чином сприйнятливий при впливі на нього n_1 заказників та n_2 лікарів може бути:

- з імовірністю $p_{зараж}$ – заражений,
- з імовірністю $p_{проф}$ – переведений у розряд несприйнятливих,
- з імовірністю $1 - p_{зараж} - p_{проф}$ – залишений у колишньому стані.

Для механізму поширення, описаного вище процесу, формули (1), (2) необхідно деталізувати.

Ймовірність зараження, імунізації сприйнятливого та лікування хворого під час відсутності синергії представляються формулами:

$$p_{зараж} = \left[1 - (1 - \sigma \cdot \varphi)^{r \frac{I(t)}{N-1}} \cdot (1 - \sigma \cdot \eta)^{vi} \right] \cdot (1 - \sigma \cdot \varphi)^{r \left[1 - \frac{I(t)+R(t,0)}{N-1} \right]} \cdot (1 - \sigma \cdot \gamma)^{vd},$$

$$p_{проф} = \left[1 - (1 - \sigma \cdot \varphi)^{r \left[1 - \frac{I(t)+R(t,0)}{N-1} \right]} \cdot (1 - \sigma \cdot \gamma)^{vd} \right] \cdot (1 - \sigma \cdot \varphi)^{r \frac{I}{N-1}} \cdot (1 - \sigma \cdot \eta)^{vi},$$

$$p_{лік} = \left[1 - (1 - \sigma \cdot \varphi)^{r \left[1 - \frac{I(t)+R(t,0)}{N-1} \right] + 1} \cdot (1 - \sigma \cdot \gamma)^{vd} \right].$$

Величина $1 - \frac{I(t) + R(t,0)}{N-1}$ являє собою частку імунізованих в оточенні суб’єкта.

Ці формули використаємо для отримання математичної моделі динаміки паніки у межах соціуму з втратою імунітету.

Оскільки початковий запас імунітету суб’єкта дорівнює θ , динаміку імунітету соціуму буде визначати його початковий розподіл на відрізок $[t_0 - \theta, t_0]$.

Під дискретним розподілом імунітету соціуму на відрізок $[t - \theta, t]$ будемо розуміти набір чисел $R(t, \tau_0), R(t, \tau_1), \dots, R(t, \tau_n)$, що представляють собою кількості здорових з запасом імунітету τ_j , $j = 0, 1, \dots, n$ в момент часу t , де $\tau_0 = 0, \tau_n = \theta$.

Функція дискретного розподілу імунітету:

$$F(t, \tau) = \sum_{\{j: \tau_j \leq \tau\}} R(t, \tau_j).$$

Для коректності вважається, що $R(t, \tau) \equiv 0$ при $\tau \in (-\infty, 0) \cup (\theta, \infty)$. За винятком властивості нормованості, вона аналогічна функції розподілу випадкової величини:

$$R(t, \tau_j) = F(t, \tau_j) - F(t, \tau_j - 0).$$

Вважається, що:

- імунітет τ – дискретний $\tau_{j+1} - \tau_j = \Delta\tau$, $j = 0, 1, \dots, n-1$,
- час t – дискретний, $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, $i \geq 0$,
- причому $\Delta\tau = \Delta t = \theta/n$.

Використовуючи балансний метод у схемі міжгрупових переходів суб'єктів соціуму, виведемо рівняння динаміки груп соціуму з різним запасом імунітету.

Зміна кількості здорових, але сприйнятливих $R(t_i, 0)$ за період Δt :

$$R(t_{i+1}, 0) - R(t_i, 0) = -[p_{\text{зараж}} + p_{\text{проф}}] \cdot R(t_i, 0) \cdot \Delta t + R(t_i, \Delta\tau).$$

Перший доданок визначає спад сприйнятливих за рахунок зараження та імунізації, другий – прибуття за рахунок тих, що втрачають імунітет.

Зміна кількості імунізованих з різним запасом імунітету:

$$R(t_{i+1}, \tau_j) - R(t_i, \tau_j) = R(t_i, \tau_{j+1}) - R(t_i, \tau_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Прирощення у часі визначається міжгруповим переходом імунізованих з групи з великим запасом імунітету до групи з меншим запасом (на $\Delta\tau$).

Для максимального запасу $\tau_n = \theta$ рівняння динаміки буде мати вигляд:

$$R(t_{i+1}, \tau_n) - R(t_i, \tau_n) = p_{\text{проф}} \cdot R(t_i, 0) \cdot \Delta t + p_{\text{лік}} \cdot I(t_i) \cdot \Delta t - R(t_i, \tau_{n-1}).$$

Зміна визначається прибуттям за рахунок профілактики та одужання (одужуючий отримує максимум імунітету), а також зменшенням за рахунок переходу частини суб'єктів у групу з меншим запасом імунітету.

Зміна кількості хворих:

$$I(t_{i+1}) - I(t_i) = p_{\text{зараж}} \cdot R(t_i, 0) \cdot \Delta t - p_{\text{лік}} \cdot I(t_i) \cdot \Delta t.$$

Прийнявши $\Delta t = \Delta\tau = 1$, $t_i = i$, $\tau_j = j$, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} R(i+1, 0) - R(i, 0) = -[p_{\text{зараж}} + p_{\text{проф}}] \cdot R(i, 0) + R(i, 1), \\ R(i+1, j) - R(i, j) = R(i, j+1) - R(i, j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ R(i+1, n) - R(i, n) = p_{\text{проф}} \cdot R(i, 0) + p_{\text{лік}} \cdot I(i) - R(i, n), \\ I(i+1) - I(i) = p_{\text{зараж}} \cdot R(i, 0) - p_{\text{лік}} \cdot I(i). \end{cases}$$

У перетвореному вигляді:

$$\begin{cases} R(i+1,0) = [1 - p_{\text{зараж}} - p_{\text{проф}}] \cdot R(i,0) + R(i,1), \\ R(i+1,j) = R(i,j+1), \quad j = 1,2,\dots,n-1, \\ R(i+1,n) = p_{\text{проф}} \cdot R(i,0) + p_{\text{лік}} \cdot I(i), \\ I(i+1) = p_{\text{зараж}} \cdot R(i,0) + (1 - p_{\text{лік}}) \cdot I(i). \end{cases} \quad (3)$$

Початкові умови: $R(0,j) = R_j, j = 0,1,\dots,n; I(0) = I_0$.

Ймовірність $p_{\text{лік}}$ дорівнюватиме ймовірності самолізування і буде константою.

Дана дискретна модель зображає дискретний характер розвитку реальної паніки, однак, для математичного аналізу в багатьох випадках зручна неперервна модель.

Отримати неперервну модель у вигляді системи диференціальних рівнянь можливо перш за все, враховуючи той факт, що в неперервному випадку $F(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \rho(t,\omega) d\omega$, де $\rho(t,\omega)$ – функція щільності розподілу імунітету. Причому, $\rho(t,\omega) \equiv 0$ при $\omega \in (-\infty,0) \cup (\theta,\infty)$, тобто $F(t,\tau) = \int_0^{\tau} \rho(t,\omega) d\omega$ при $\tau \geq 0$.

Практична реалізація моделі. Спробуємо спростити математичну модель динаміки паніки у межах соціуму, котра виражена у системою рівнянь (3). Уточнимо, що на суб'єкта діють тільки хворі сусіди, не враховується синергія, одужання настає тільки за рахунок самолізування.

Тоді дискретна математична модель такої паніки буде представлена системою рівнянь:

$$\begin{cases} R(i+1,0) = [1 - p_{\text{зараж}}] \cdot R(i,0) + R(i,1), \\ R(i+1,j) = R(i,j+1), \quad j = 1,2,\dots,n-1, \\ R(i+1,n) = p_{\text{лік}} \cdot I(i), \\ I(i+1) = p_{\text{зараж}} \cdot R(i,0) + (1 - p_{\text{лік}}) \cdot I(i). \end{cases} \quad (4)$$

З початковими умовами: $R(0,j) = R_j, j = 0,1,\dots,n; I(0) = I_0$.

Ймовірність $p_{\text{зараж}}$ виражатиметься в цьому випадку формулою

$$p_{\text{зараж}} = 1 - (1 - \sigma \cdot \varphi)^{r \frac{I(t)}{N-1}}.$$

Модель прорахуємо при наступних параметрах та початкових умов (рис.1):

$$\varphi = 0.5, \quad \sigma = 0.5, \quad p_{\text{лік}} = 0.1, \quad \theta_1 = 5, \quad \theta_2 = 50, \quad r = 8,$$

$$N = 3136,$$

$$R(0,j) = 0, \quad j = 1,2,\dots,n-1,$$

$$R(0,n) = 50,$$

$$R(0,0) = 3036,$$

$$I(0) = 50.$$

На рис.2 та рис.3 показані графіки величин $\frac{R(i,0)}{N-1}$, $\frac{I(i)}{N-1}$, $1 - \frac{R(i,0)}{N-1} - \frac{I(i)}{N-1}$ при $i \in [0,100]$ для системи (4) при значенні запасу імунітету θ_1 та θ_2 .

Рівень сприйнятливості:	0.5
Рівень впливу:	0.5
Ймовірність одужання:	0.1
Запас імунітету:	5 та 50
Кількість зв'язків:	8
Кількість суб'єктів соціуму:	3136
Кількість здорових:	3036
Кількість хворих:	50
Кількість суб'єктів з максимальним імунітетом:	50
Крок:	100

Рис.1. Початкові умови

Зміна кількості людей у соціумі за категоріями

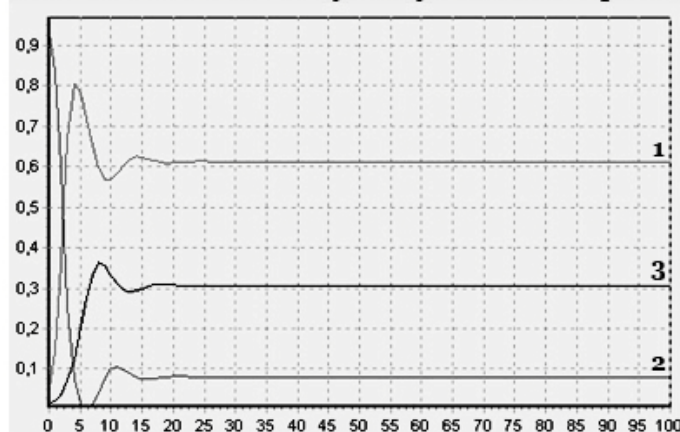


Рис.2. Графік поведінки розв'язків системи (4) на відрізку $[0,100]$ для запасу імунітету $\theta_1 = 5$.

Зміна кількості людей у соціумі за категоріями

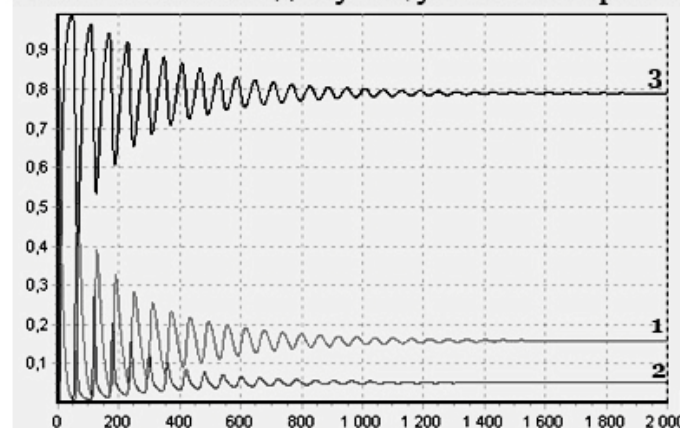


Рис.3. Графік поведінки розв'язків системи (4) на відрізку $[0,2000]$ для запасу імунітету $\theta_2 = 50$.

Таким чином проведено чисельний розрахунок динамічної моделі валютної паніки.

З наведених графіків зміни кількості суб'єктів різних груп соціуму бачимо, що імітований процес паніки відповідає реальному процесу: кількість інфікованих різко зростає, а кількість здорових навпаки – різко спадає; за рахунок збільшення імунізації суб'єктів їх панічна поведінка вгамовується.

Бачимо, що в імітаційній моделі спостерігається феномен довгих хвиль. Робимо припущення, що довжина хвилі має хаотичний характер.

У подальшому планується дослідження властивостей математичної моделі динаміки валютної паніки соціуму з формуванням та втратою імунітету за різних умов. Особливу увагу буде звернено на виявлення нестійких хаотичних станів, для розроблення стратегій поведінки суб'єктів соціуму.

Висновки. Наукова новизна результатів дослідження полягає у наступному:

- розроблена математична модель динаміки паніки у соціумі в дискретній формі (у вигляді системи різницевих рівнянь), що характеризує динаміку зміни чисельності сприйнятливих, імунізованих та заражених для різних сценаріїв зараження, лікування та профілактики в умовах дії різних факторів (диференційованості соціуму за соціально-психологічними та рольовими характеристиками суб'єктів, синергії взаємодії комунікаторів, наявності конструктивних і деструктивних ЗМІ, придбання та втрати імунітету);
- отримано формули ймовірностей зараження, лікування, профілактики в умовах дії різних факторів;
- у формулах реалізовано математичний вираз ефекту синергії взаємодії комунікаторів та реципієнта.

Математична модель динаміки валютної паніки в умовах невизначеності якісно вірно описує розвиток валютної паніки. Але безпосередній кількісний прогноз навряд чи можливий. Проте знання механізмів розвитку паніки дозволяє будувати адекватніші процедури прогнозу на основі технічних (статистичних, нейромережових) та аналітичних (експертних) методів.

Перспективи подальших розробок: розробка математичної моделі динаміки паніки у соціумі в безперервній формі (у вигляді системи диференціальних рівнянь), створення імітаційної моделі різних сценаріїв розвитку паніки та перевірка адекватності розробленої моделі масової паніки за рахунок дослідження динаміки реальних валютних панік.

Література

1. Стабільність валютної непередбачуваності. [Електронний ресурс]. – К.: Дослідницький центр Разумкова, 18 червня 2008 р. – Режим доступу: http://www.uceps.org.ua/ukr/article.php?news_id=590. – Електрон. текст. дан..
2. Максимов В. Основы успеха валютных спекуляций. Как научиться зарабатывать на курсовой разнице ведущих мировых валют. [Текст] – М.: Евро, – 2004. – 320 с. – ISBN - 5-9900095-3-4
3. Данич В.Н. Идентификация быстрых процессов [Текст] : методы и модели / В.Н.Данич. – М.: Арт-Бизнес-Центр, – 1999. – 229 с. – 500 экз. – ISBN - 5-7287-0170-1

4. Назаретян А.П. Психология стихийного массового поведения. Толпа, слухи, политические и рекламные кампании. [Текст] – М.: Академия, – 2005. – 160 с. – ISBN - 5-7695-2120-1
5. Почебут Л.Г. Социальная психология толпы. [Текст] – СПб.: Речь, – 2004. – 240 с. – ISBN - 5-9268-0261-X
6. Райгородский Д.Я. Психология масс. [Текст] // Хрестоматия / Д.Я. Райгородский / – Самара: Изд. дом "БАХРАХ-М", – 2010. – 592 с. – ISBN - 978-5-94648-087-1
7. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. [Текст] – М.: Факториал, – 1997. – 512 с. – ISBN - 5-88688-012-7