УДК 331.522:331.523:331.524

© Купка О.О.
магістр,
© Стець О.В.
канд. фіз.-мат. наук, доцент

ОПТИМАЛЬНА ДИНАМІКА РОЗПОДІЛУ РОБОЧИХ МІСЦЬ В ДВОХСЕКТОРНІЙ МАКРОЕКОНОМІЧНІЙ МОДЕЛІ

Вступ. Вивчення макро- та мікроекономічних динамічних процесів за допомогою диференційних рівнянь не рідко буває незручним, оскільки економічні явища завжди описуються гладкими функціями, що часто бувають не лише кусковогладкими, а й можуть мати розриви. Тому перехід до математичних моделей із застосуванням інтегральних співвідношень усуває цей недолік. Цей факт вперше помічений В. М. Глушковим. Запропонована ним модель двохсекторної макроекономіки [2] була розвинута В.В. Івановим [3]. В даній роботі розв'язана задача оптимального розподілу трудових ресурсів запропонована в [2]. Аналогічно як і в [7], оптимальний розв'язок має стрибковий характер (терпить розрив). Точки переключення (стрибки) оптимального керування залежать від рівня завантаження працівників у галузі виробництва засобів виробництва (група А) та в галузі виробництва засобів споживання (група Б).

Постановка задачі. Розглянемо опис динамічних макроекономічних моделей за допомогою систем інтегральних рівнянь на прикладі найпростішої двохпродуктової моделі. Будемо вважати, що все виробництво ділиться на дві групи: виробництво засобів виробництва (група А) та виробництво предметів споживання (група Б).

Розглянемо макроекономічну модель [2]:

$$\max_{x,y}\int_{\underline{t}}^{\bar{t}}\left(\int_0^t y(\tau)\mu(\tau,t)\beta(\tau)d\tau\right)dt \tag{1}$$

за умов:

$$x(t)+y(t)=\int_0^t x(\tau)\lambda(\tau,t)\alpha(\tau,t)d\tau,\ \ 0\le t\le \bar{t}, \tag{2}$$

$$\int_0^t\big(x(\tau)\lambda(\tau,t)+y(\tau)\mu(\tau,t)\big)d\tau\le n(t)r(t), \tag{3}$$

$$0\le\lambda(\tau,t)\le 1,\ 0\le\mu(\tau,t)\le 1,\ 0\le\tau\le\bar{t}$$
$$x(t)\ge 0,\ y(t)\ge 0$$

де вираз під знаком «max» характеризує обсяг споживання за період $[\underline{t},\bar{t}]$; $x(t), y(t)$ – відповідно, швидкості зростання робочих місць у групах А і Б; $\lambda(\tau,t),\mu(\tau,t)$ – коефіцієнти завантаження потужностей на момент часу t, створених в момент τ у галузях А і Б. Рівняння (2) будемо називати рівнянням розвитку фондів. За умови заміни нерівності «≤» на рівність «=» рівняння (3) описує баланс робочої сили; $n(t)$ – кількість працівників (списковий склад), що знаходиться в розпорядженні економічної системи в момент t; $r(t)$ – середня тривалість робочого дня (з урахуванням вихідних днів, відпусток, хвороб та. ін.); $\alpha(\tau,t)$ – кількість робочих місць створених в момент t за допомогою технології, створеної за одиницю часу в розрахунку на одне робоче місце (усереднене) в технології τ у галузях групи А (продуктивність праці в групі А); $\beta(t)$ – обсяг випуску предметів споживання за одиницю часу (наприклад, за одну добу) в розрахунку на одиницю виробничих потужностей у групі Б (продуктивність праці у групі Б).

В якості одиниці виміру потужностей приймемо одне робоче місце (усереднене). Будемо вважати, що функції $\lambda(\tau,t),\ \mu(\tau,t),\ \alpha(\tau,t),\ \beta(t),\ n(t),\ r(t)$ задані.

Таким чином, видно, що в подальшому нам необхідно максимізувати функціонал (1) змінюючи розподіл робочих місць між групами виробництва.

Методологія

В роботі, згідно з [2], використано інтегральні співвідношення між економічними показниками та властивості макроекономічних залежностей між ними. В економічних дослідженнях традиційне використання систем диференційних рівнянь не завжди виправдане, оскільки економічні процеси носять розривний характер (часто приймаються кардинальні, вольові рішення), тому доцільніше використовувати інтегральні співвідношення між економічними показниками. Підінтегральні функції з розривами або зламаними траєкторіями не заважають обчисленню інтегралів. В той же час, в точках розриву або зламу траєкторій їх диференціали відсутні. Тому в економічних дослідженнях використання інтегральних (згладжених) операцій необхідне в багатьох випадках. Відхилення від традиційного підходу в таких

ситуаціях виправдане на лише з позиції наукових досліджень, згладжені стратегії більш прийнятні для реальної поведінки економічної системи.
Результати дослідження. В даній роботі у відповідності з [2] динамічна макроекономічна модель описується системою інтегральних рівнянь, що дозволяє уникнути проблем пов'язаних з недиференційованістю магістральних траєкторій. Розглянемо найпростішу двохпродуктову модель. Будемо вважати, що все народне господарство ділиться на два сектори: виробництво засобів виробництва (група А) та виробництво предметів споживання (група Б). Відмітимо деякі особливості розглядуваної моделі. По-перше, до групи галузей Б ми зараховуємо не лише предмети особистого споживання, а й усе невиробниче споживання в цілому. Воно включає всі види масового обслуговування населення (пасажирський транспорт, системи теле- та радіомовлення та ін.). По-друге, відносячи виробництво якого-небудь кінцевого продукту до однієї з двох груп, ми відносимо до цієї ж групи виробництво всіх проміжних продуктів, необхідних для його виготовлення. Слід відмітити, що прийнятий нами поділ дещо відрізняється від поділу, який застосовується в сучасній практиці планування.

Із наведених вище міркувань випливає важливий висновок якісного характеру: середня складність виробництва в галузях групи А та Б на сьогодні приблизно однакова. Це дозволяє значно спростити модель і, як показано нижче, одержати оптимальну частку розподілу робочих місць між групами галузей А та Б в кожен момент часу. Як показано далі, оптимальний розподіл робочих місць для забезпечення оптимального прибутку забезпечуватиметься за передислокації робочої сили в групу галузей, де продуктивність праці менша. Зрозуміло, що в кожен момент часу, бо технологія виробництва з часом змінюється, відповідно змінюється і продуктивність праці. Рівновага в складності виробництва між групами А та Б тягне за собою рівновагу у використанні трудових ресурсів, в залежності від інтенсивності технологій. У галузях з відсталою технологією потреба в робочій силі більша.

Для зручності зробимо заміну змінних

$$m(t) = x(t) + y(t), \quad x(t) = \rho(t)m(t), \; y(t) = (1-\rho(t))m(t),$$
$$0 \le \rho(t) \le 1, \; m(t) \ge 0$$

Тоді задача (1)-(3) матиме вигляд:

$$\max_{x,y} \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left(\int_0^t (1-\rho(\tau))m(\tau)\mu(\tau,t)\beta(\tau)d\tau \right) dt \tag{5}$$

$$m(t) = \int_0^t \rho(\theta)m(\theta)\lambda(\theta,t)\alpha(\theta,t)d\theta \tag{6}$$

$$\int_{\underline{0}}^{t} \Big(\rho(\tau)\big(\lambda(\tau,t) - \mu(\tau,t)\big) + \mu(\tau,t)m(\tau) \Big) d\tau = n(t)r(t) \tag{8}$$

або

$$\max_{\rho(t)} \left\{ L = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\int_0^t \left(\big(1-\rho(\tau)\big)\mu(\tau,t)\beta(\tau) \cdot \int_0^{\tau} \rho(\theta)m(\theta)\lambda(\theta,t)\alpha(\theta,t)d\theta \right) d\tau \right] dt \right\} \tag{9}$$

за виконання умови (8).

Розглянемо найпростіший варіант розподілу робочих місць в групах А і Б. Будемо вважати, що перерозподіл робочих місць в розглядуваних групах галузей з часом не змінюється. Покладемо $\rho(t) = \overline{\rho} = const$. Виберемо оптимальне значення цього параметру. З (9) одержимо:

$$\max_{\overline{\rho} \in [0,1]} \left((1-\overline{\rho})\overline{\rho} \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} R dt \right); \tag{10}$$

де $R = \int_0^t \left(\mu(\tau,t)\beta(\tau) \cdot \left(\int_0^{\tau} m(\theta)\lambda(\theta,t)\alpha(\theta,t)d\theta \right) \right) d\tau$

на кінцях проміжку $[0,1]$ параметр не може забезпечити максимальне значення функціоналу (10). Тому, для знаходження оптимального значення функціоналу (10) знайдемо його похідну по $\overline{\rho}$ і прирівняємо нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\rho}} = (1-2\overline{\rho}) \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[\int_0^t \left(\mu(\tau,t)\beta(\tau) \cdot \left(\int_0^{\tau} m(\theta)\lambda(\theta,t)\alpha(\theta,t)d\theta \right) d\tau \right) \right] dt = 0;$$

$$\overline{\rho}^{opt} = \frac{1}{2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \overline{\rho}^2} = -2\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} R dt < 0 \text{ бо } R > 0.$$

Отже, оптимальний розподіл робочих місць (за наведених вище припущень) буде рівномірний їх розподіл між групами.

Далі задача зводиться до розв’язку інтегрального рівняння:

$$\int_0^t \left[\lambda(\tau,t)+\mu(\tau,t)\right]m(\tau)d\tau = 2n(t)r(t); \tag{12}$$

відносно невідомого $m(t)$ (рівняння Вольтера I-го роду) з подальшим обчисленням інтегралу

$$\frac{1}{4}\int_{\underline{t}}^{\bar{t}}\left[\int_0^t\left(\mu(\tau,t)\beta(\tau)\cdot\int_0^{\tau} m(\theta)\lambda(\theta,t)\alpha(\theta,t)d\theta\right)d\tau\right]dt = L$$

де L - сумарна оптимальна кількість продуктів споживання вироблених за плановий період T.

Висновки. Традиційні форми динамічних макроекономічних моделей, які ґрунтуються на використанні звичайних диференційних рівнянь для оптимізації розподілу трудових ресурсів, незручні, бо оптимальні розв’язки не гладкі функції, а інколи й розривні. Тому використання інтегральних рівнянь у таких дослідженнях цілком виправдане. За досягнення оптимальних розв’язків у моделях з використанням диференційних рівнянь стрибкоподібний характер оптимальних керувань факт відомий [6,7]. У розглянутій моделі подібна ситуація виникає при максимизації (1). Ця обставина забезпечує передислокацію трудових ресурсів, в залежності від завантаження $\alpha(\tau,t)$, $\mu(\tau,t)$ на даний проміжок часу, в групу галузей де завантаження більше. Зрозуміло, в межах можливостей (виконання нерівності (3)).

Модель показує, що перерозподіл трудових ресурсів із галузей групи А у галузі групи Б, чи навпаки, здійснюється оперативно, відповідно до (11), (12).

Література

1. Ахмедова А. А., Змеев О. А., Терпугов А. Ф. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу // Вестник ТГУ.– 2002.– №275.– С. 181-184.
2. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // К.: Управляющие системы и машины. – 1977. – №2. – С. 5.
3. Глушков В. М., Иванов В. В. Моделирование оптимизации рабочих мест между отраслями производства групп А и Б // К.: Кибернетика. – 1977. – №6. – С. 117-131.
4. Кац В. М., Лившиц К. И. Влияние расходов на рекламу на характеристики страховой компании // Известия ВУЗов России. – 2004. – №1.-Физика –С. 29-32.
5. Охрименко М. Г. О некоторых классах задач оптимального управления, допускающих распад П-систем // К.: Кибернетика. – 1974.- №2. – С. 131-132.
6. Охрименко М.Г. Обобщенные теоремы об n интервалах // М.: Вычислительная математика. – 1965. – 193 с.
7. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. – М.: Физматгиз, 1959. – 543 с.